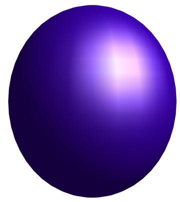
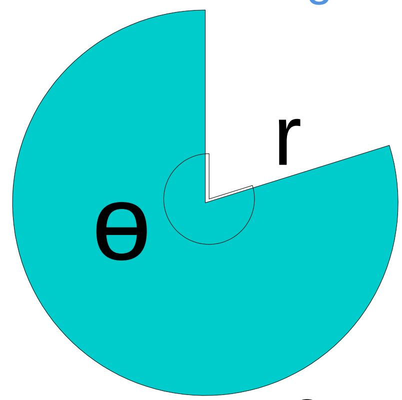
Área de la esfera

(Deducción Arquimideana)



http://dinamate.org

0.- Repaso de Áreas.



a) El Área de un sector circular como el siguiente es

$$A=\theta r^2/2$$

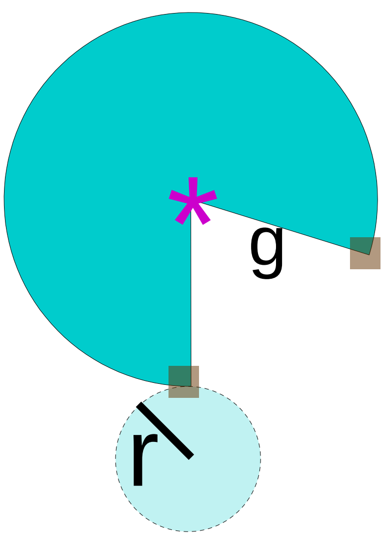
donde $\boldsymbol{\theta}$ es el ángulo (rad) del sector circular y **r** es el radio de éste.

** ¿ Que pasa cuando $\theta=2\pi$?*

$$A=\theta r^2/2$$

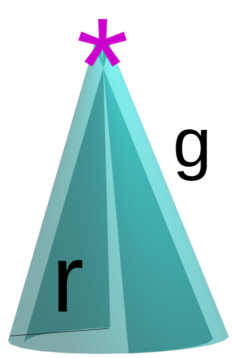
b) Ahora, como al levantar el centro del sector hasta unir los extremos de los radios, o bien, al enrollar éste sector alrededor de una circunferencia (como taco/cucurucho), obtendremos un cono, **su Área debe ser la misma**.

Con radios g (para la generatriz del cono) y r (para la circunferencia alrededor de la cual se va a enrollar) , obtenemos :



$$A=\pi rg$$

$$A=\theta g^2/2$$



$$A=(2\pi r)g/2$$

$$A=\pi rg$$

pues

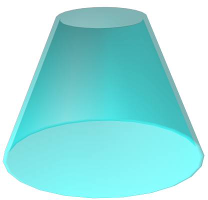
$$\theta g=2\pi r$$

¿Porqué?

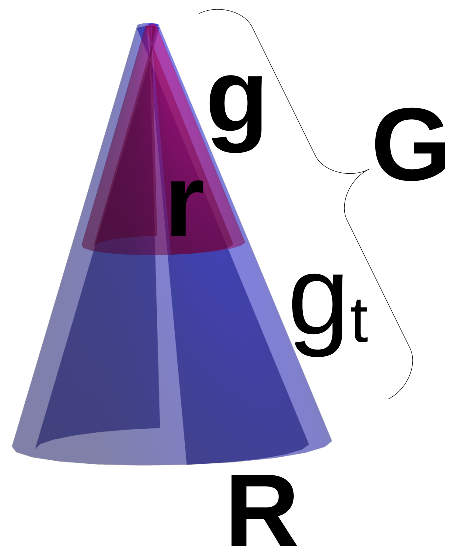
O bien

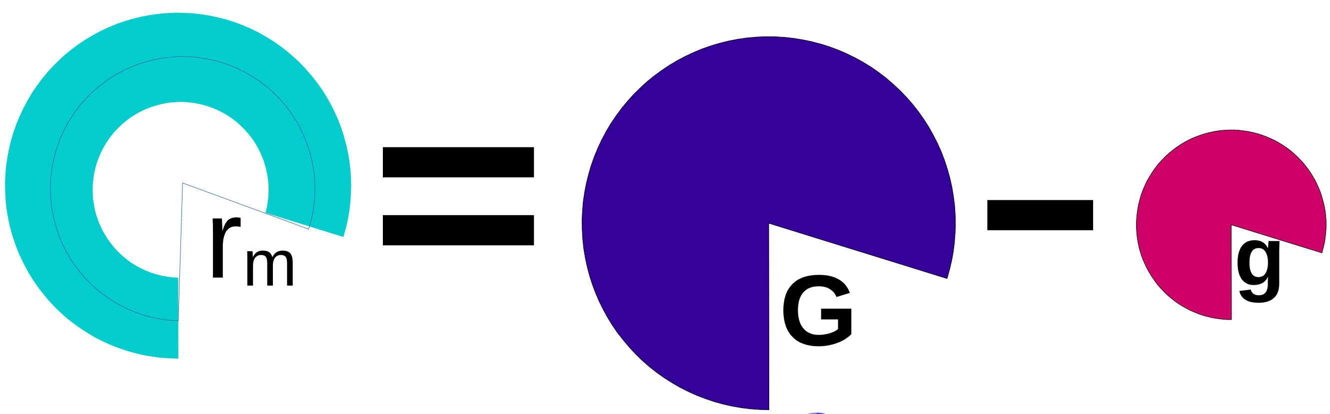
$$A=\theta g^2/2$$

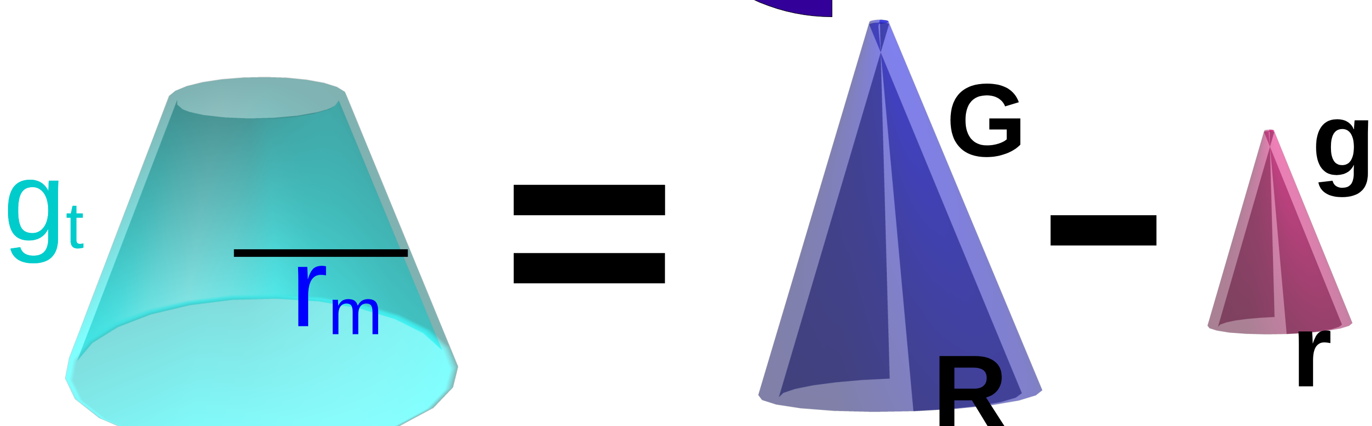
c) Finalmente, para obtener el Área de un cono truncado, restamos las Áreas de dos conos completos. Ésto equivale a la diferencia de dos sectores circulares, y bien :



$$A_t=A_1-A_2$$
$$A_t=\theta G^2/2-\theta g^2/2$$
$$A=\theta(G+g)(G-g)/2$$
$$A=\theta g_t(G+g)/2$$
$$A=\theta g_t(2R\pi/\theta+2\pi r/\theta)/2$$
$$A=2\pi g_t(R+r)/2$$
$$A=2\pi g_t r_m$$





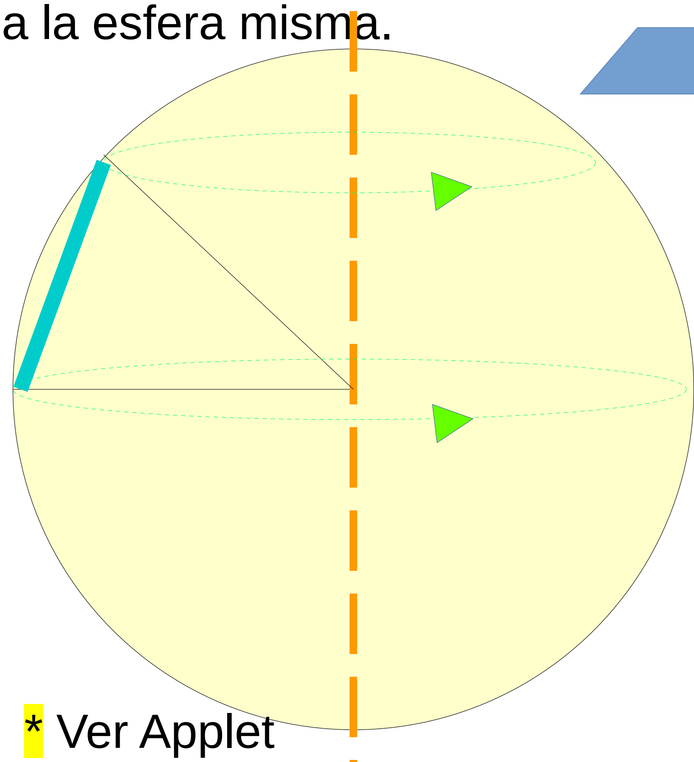


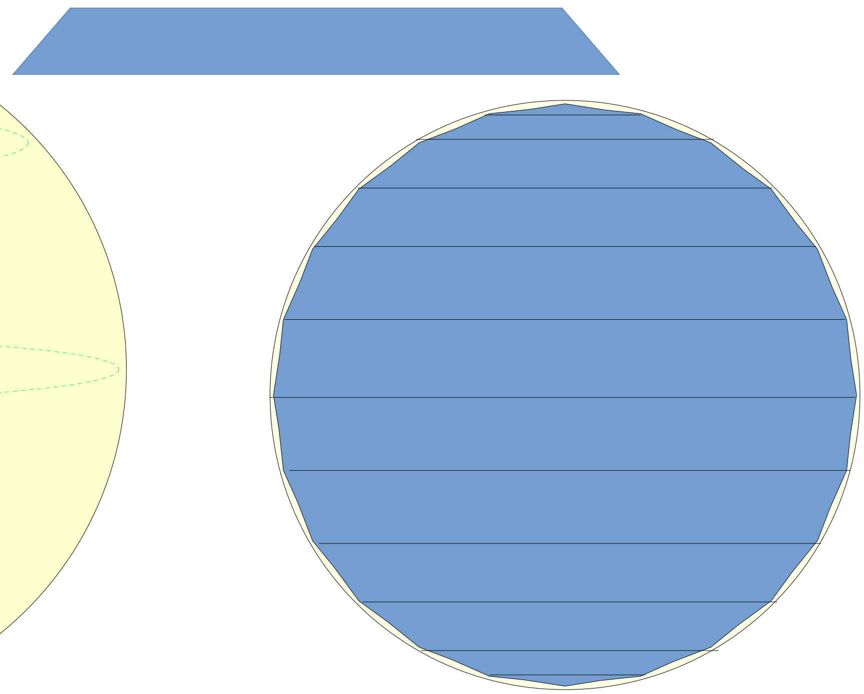
$$A_t=\pi g_t r_m$$

Es decir, el Área de cada tronco de cono depende de la generatriz truncada y de el radio medio.

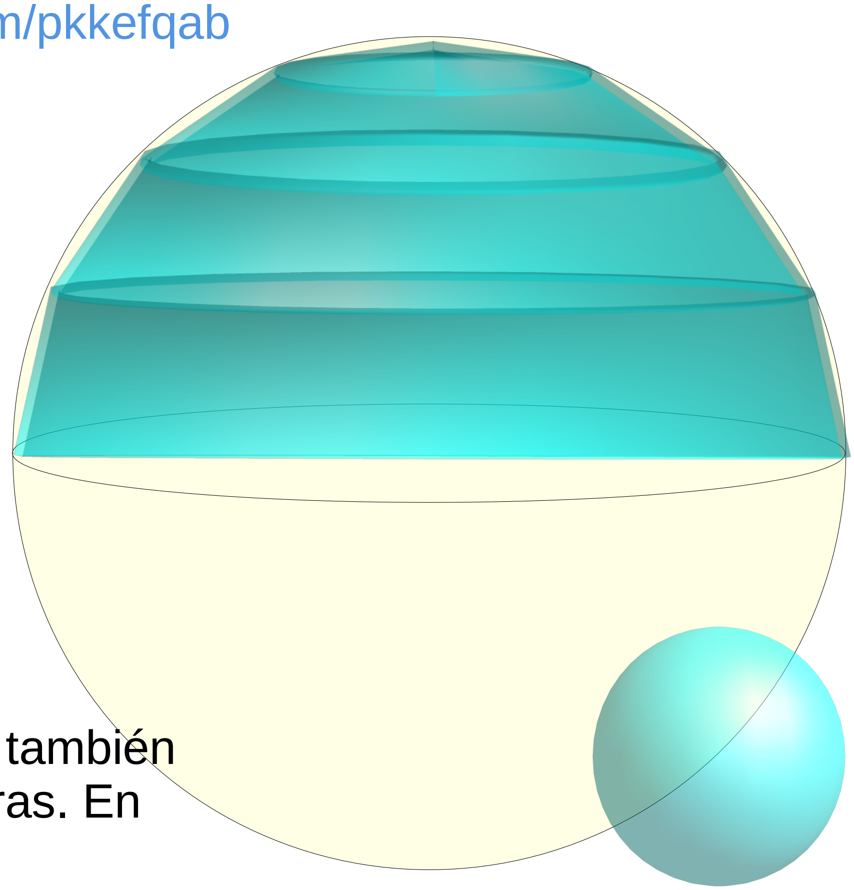
1.- Idea General para su obtención

La idea es inscribir un conjunto de **cuerdas**(segmentos) en la esfera para que al hacerlas rotar alrededor de un **eje** coplanar, que no corte al mismo (particularmente un diámetro), genere una figura similar a la esfera misma.

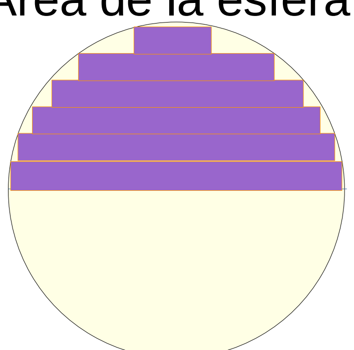




* Ver Applet
https://www.geogebra.org/m/pkkefqab



Al hacer que el número de éstas sea muy grande, el Área de la figura obtenida se parecerá cada vez más al Área de la esfera.



Nota : Ésto se puede hacer también con rectángulos y otras figuras. En cálculo se muestra cómo.

2.- Parte medular de la obtención

Tenemos que

$$A=2\pi rg$$

Como los triángulos ΔABC y ΔDEF son semejantes ¿Porqué? entonces

$$g/h=a/r$$

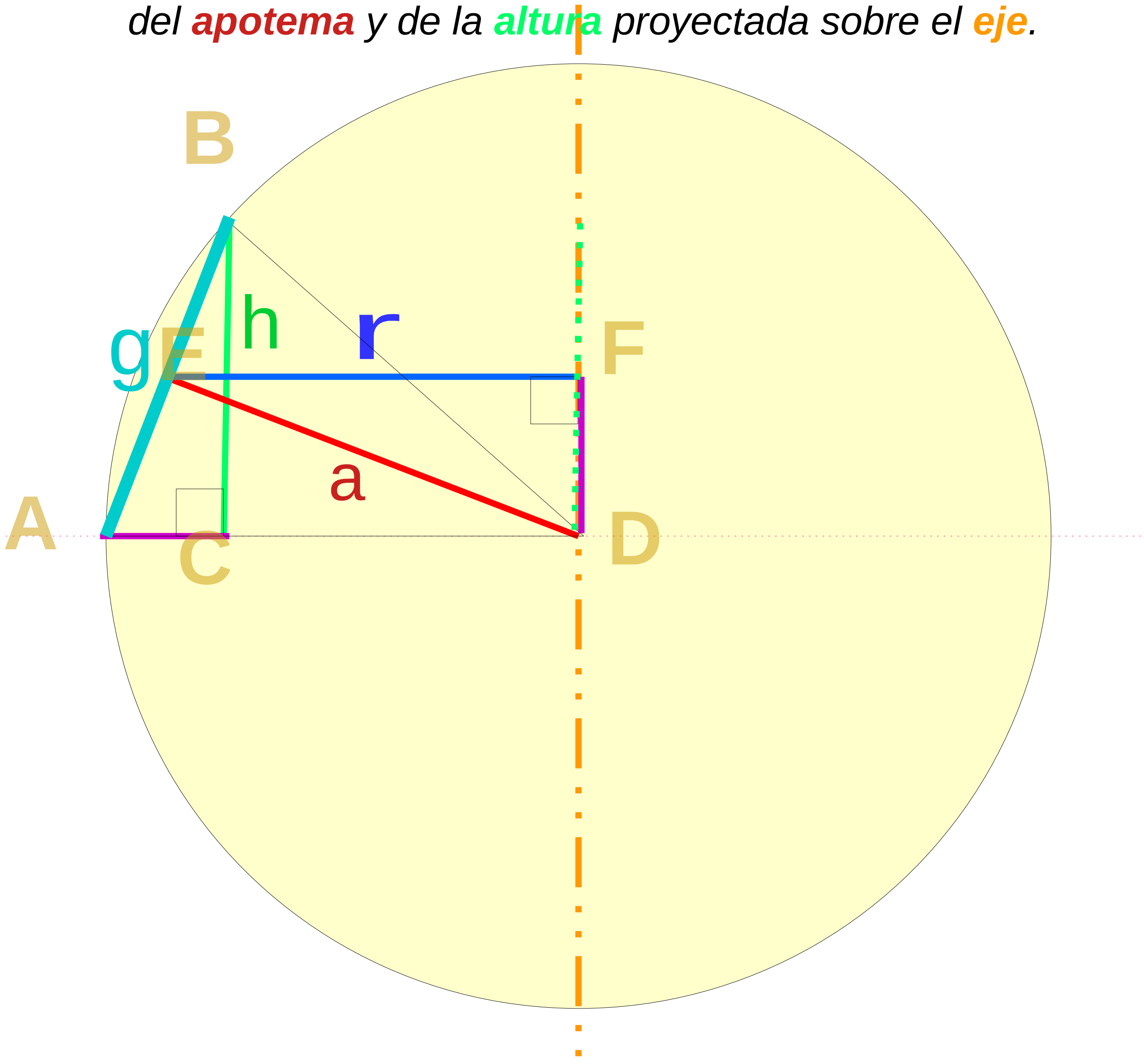
Con los productos cruzados

$$rg=ah$$

Y así finalmente

$$A=2\pi ah$$

*Es decir, el Área de cada tronco de cono depende ahora del **apotema** y de la **altura** proyectada sobre el **eje**.*



3.- Finalmente

Conforme el **número de lados** aumenta, el **apotema** del polígono inscrito se parece cada vez más al **radio**, y la suma de las alturas de las proyecciones de las generatrices también se parece a **éste**.
Así pues, sustituyendo cada uno **a** , y **h** por **r**, en

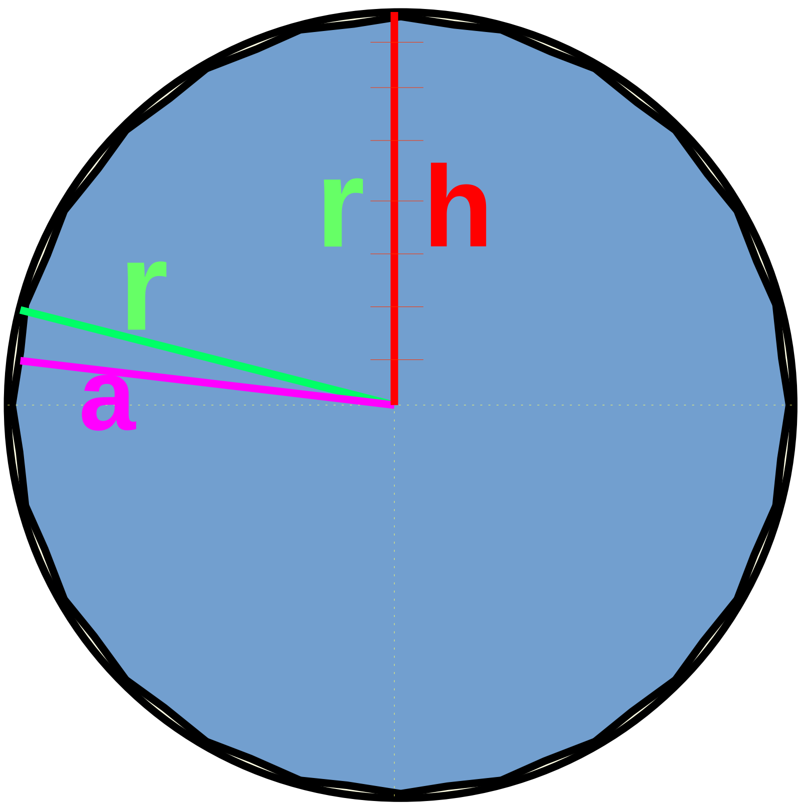
$$A=2\pi ah$$

obtenemos :

$$A=2\pi r^2$$

Y bien, el Área total será el dobe:

$$A=4\pi r^2$$



Visita : Dinamate.org