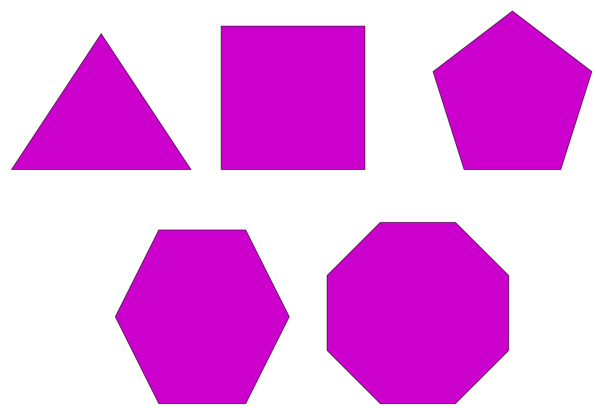
Perímetro y **Área** de la circunferencia **(Círculo)**.

•Valores aproximados de ***π***
Método de exhausción

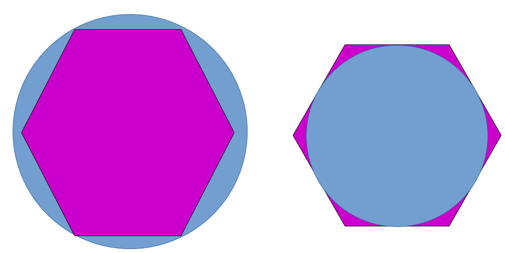
Formas Arquimideanas

http://dinamate.org

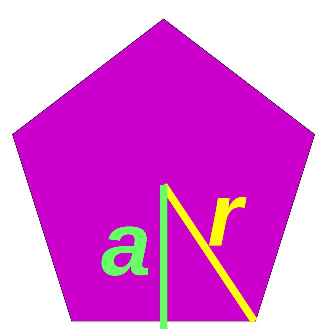
0.- Definiciones y conceptos previos
(Repaso)



a) Un polígono se dice regular si todos sus ángulos son iguales así como sus lados.



b) Un polígono regular siempre se puede inscribir en una circunferencia y también puede ser circunscrito a otra.

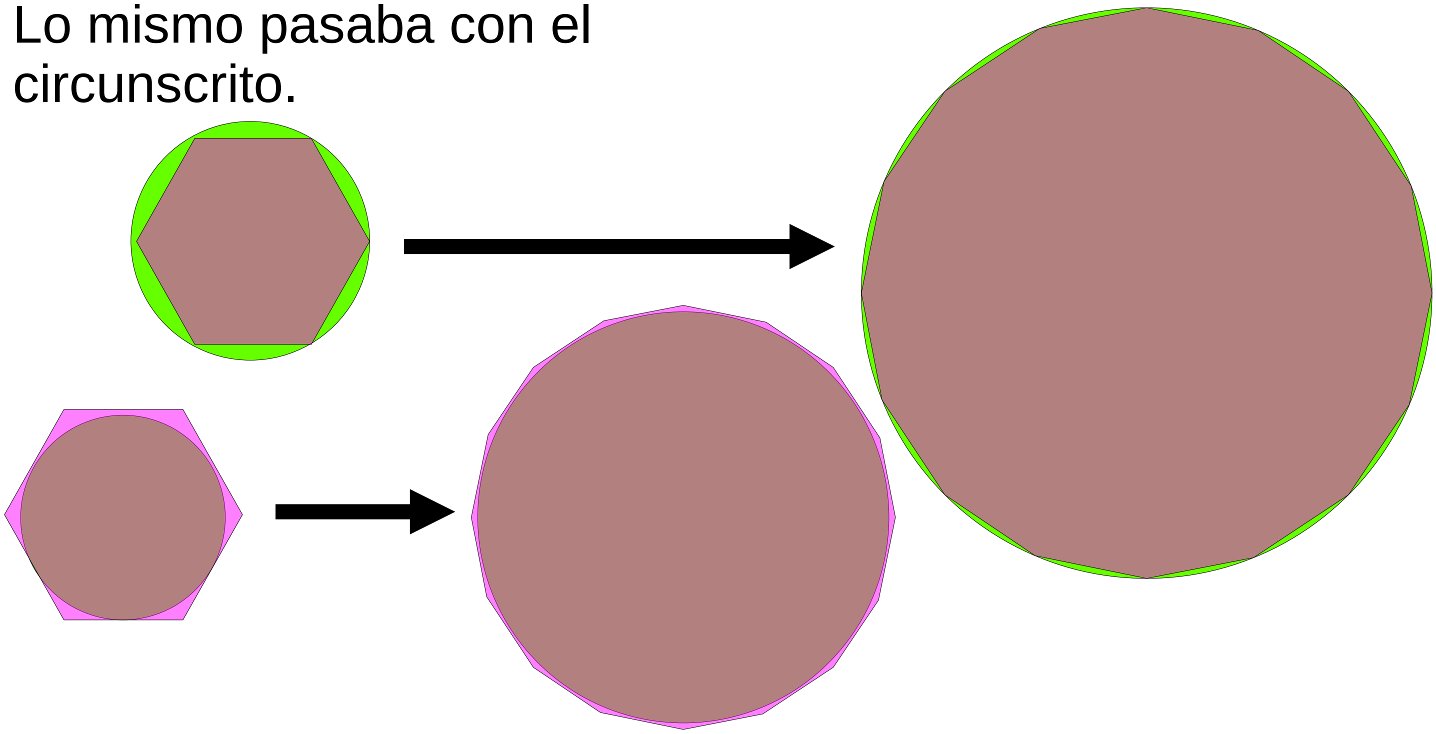


c) En un polígono regular se llamará **radio** al segmento que une su centro con cualquiera de sus vértices, y **apotema** a aquél que une su centro con cualquiera de los puntos medios de alguno de sus lados.

1.- Motivación y Definición de ***π***

*Nota : De aquí en adelante al hablar de *polígono*, entenderemos que es regular.

Arquímedes notó que mientras más lados tenía un polígono inscrito, más se parecía al círculo. Lo mismo pasaba con el circunscrito.



Por lo tanto, parecía una buena idea estudiar éstos polígonos para comprender mejor al círculo.

Por otra parte observó que aunque se incrementara el número de lados, la razón(división) del perímetro de cada uno entre el radio del círculo tendía a un único valor. Éste debería tener un nombre especial, y de ahí surge el número **π**, derivado de la letra griega **pi**. Éste número resulta ser irracional, es decir, su desarrollo decimal es infinito y no periódico.

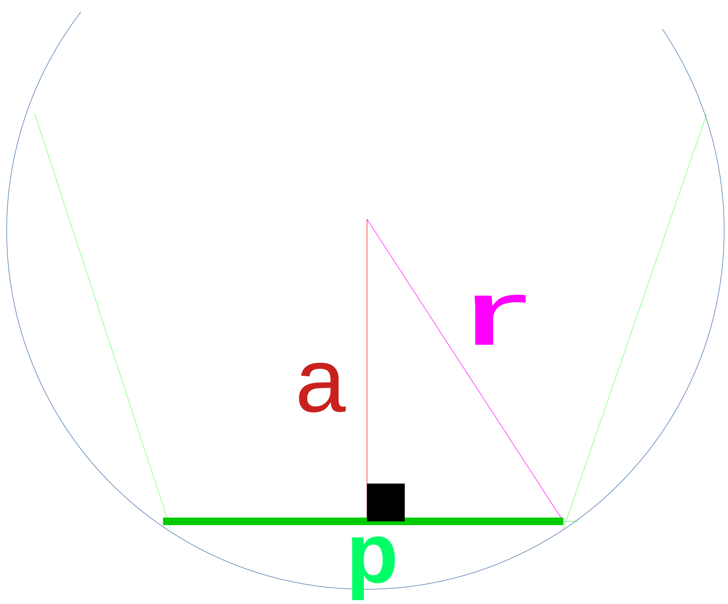
► Aproximaciones de éste número se encuentran en la tercera sección de éste documento.

Applet en :
https://www.geogebra.org/m/qwchtqcu

Comencemos pues, con el estudio de éstos polígonos, para lo cual necesitaremos tres herramientas básicas.

*Nota : sabemos que la medida del radio es dependiente del lado pero como para cada polígono la relación es distinta, los tomaremos como "independientes".

a) Cálculo del apotema del polígono inscrito como función del lado y del radio .



$$a = \frac{\sqrt{4r^2 - p^2}}{2}$$

Con el Teorema de Pitágoras obtenemos que :

$$a^2+(p/2)^2=r^2$$

De donde, al despejar p, tenemos

$$a = \frac{\sqrt{4r^2 - p^2}}{2}$$

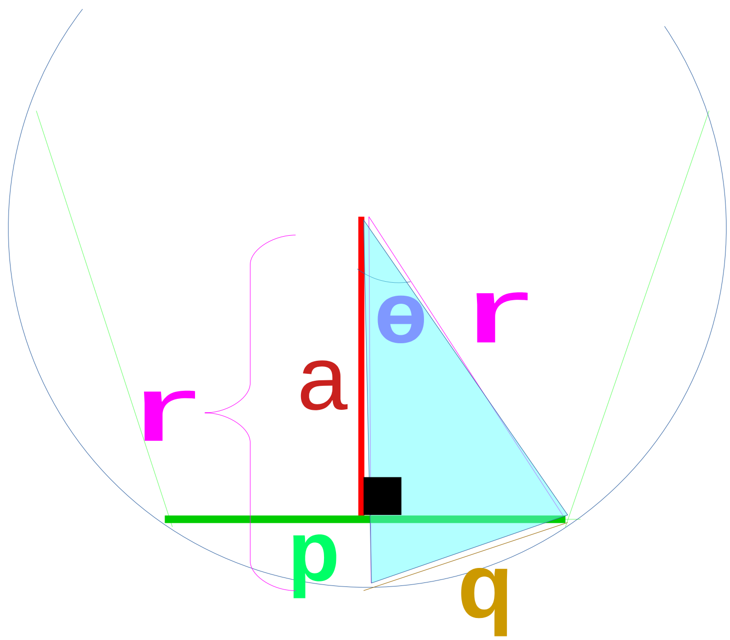
b) Cálculo de la medida del lado del polígono del doble de lados como función del lado original y del radio.

Con respecto al triángulo marcado y con la ley de los cosenos tenemos que :

$$r^2+r^2=q^2+2r^2\mathrm{Cos}(\theta)$$

Pero

$$\mathrm{Cos}(\theta)=a/r$$



Entonces

$$r^2+r^2=q^2+2ar$$

Y como

$$a=\frac{\sqrt{4r^2-p^2}}{2}$$

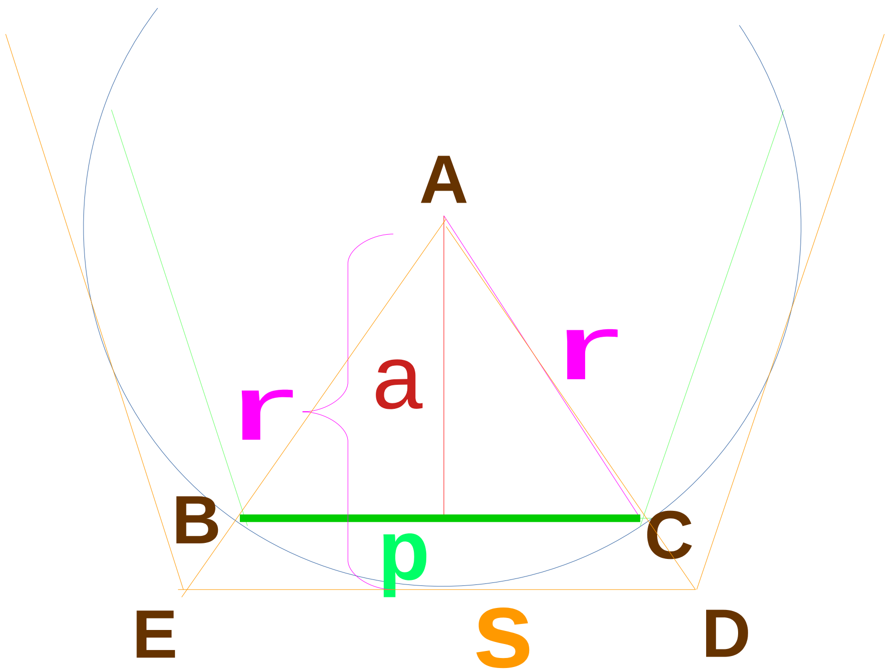
Entonces

$$q^2=2r^2-r\sqrt{4r^2-p^2}$$

Finalmente, despejando **q** obtenemos

$$q=\sqrt{2r^2-r\sqrt{4r^2-p^2}}$$

c) Cálculo del lado del polígono circunscrito a partir de la medida del lado de aquél inscrito y del radio.



Como los triángulos Δ**ABC** y Δ**AED** son semejantes (¿porqué?), tenemos que :

$$s/p=r/a$$

Pero

$$a=\frac{\sqrt{4r^2-p^2}}{2}$$

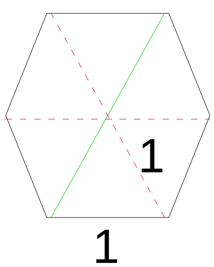
Entonces

$$s=\frac{2rp}{\sqrt{4r^2-p^2}}$$

2.- Cálculo de valores aproximados de π

Con las fórmulas obtenidas en a), b) y c) , y por sencillez, utilizaremos ***6n***-ágonos *(de lados 6,12,18,etc.)* inscritos y circunscritos en la circunferencia.

• Comencemos pues con el hexágono (pues en él, y por estar conformado por triángulos equiláteros el lado y el radio, ambos valen 1 s.p.g.) :



En el inscrito, el perímetro vale **6** y al dividirlo entre el diámetro (2) da el primer valor aproximado inferior de π

$\pi=3$

Para el circunscrito,

$$S = \frac{2(1)(1)}{\sqrt{4(1)^2-(1)^2}} \simeq 1.1547$$

Por lo que el perímetro es

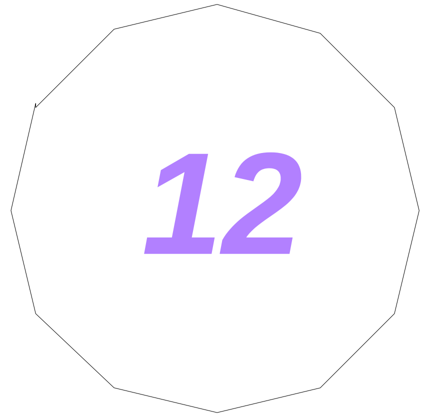
$P \simeq 6.9282$

Y al dividir enter el diámetro (2) tenemos otro valor aproximado superior para π.

$\pi \simeq 3.4641$

- Ahora, con el dodecágono :

$$q = \sqrt{2(1)^2 - 1\sqrt{4(1)^2-(1)^2}}$$



De donde su lado mide

$q \simeq$ **0.5176**

Por lo que su perímetro es

$P = 12q \simeq 6.2116$

Y bien, tenemos el segundo valor aproximado inferior de π

$\pi \simeq 3.1058$

Y con la misma fórmula c) se verifica para el circunscrito (de manera análoga) que el segundo valor aproximado superior para π es

$\pi \simeq 3.2153$

Verifica por favor los detalles

Con ayuda de una calculadora y las fórmulas dadas,termina de llenar la siguiente tabla **(entrega tus cálculos en hojas aparte)** :

Número de lados	Polígono inscrito			Polígono circunscrito		
	p	P	π=P/d	q	P	π=P/d
6	1	6	3	1.1547	6.9282	3.4641
12	0.5176	6.2116	3.1058	0.5358	6.4307	3.2153
24						
48						
96						
192						
384						
768						

3.- Perímetro de la circunferencia

Una vez que notamos que estos valores(inferiores y superiores) del cociente(división) entre el **P**erímetro de la circunferencia y el diámetro de la misma, tienden a un único valor, es así pues, natural definir a éste valor con un nombre , en éste caso π .

Y resulta inmediato que el perímetro de la circunferencia sea

$$P=2\pi r$$

A partir de la definición del número ***π*** mismo(despejándo el Perímetro).

4.- Área del círculo

Con un razonamiento similar a aquél con el que se obtuvieron aproximaciones para **π**, notamos no solamente que *conforme aumenta el número de lados* en el polígono(ya sea inscrito o circunscrito) :

a) El **P**erímetro de éste se parece cada vez más al **P**erímetro de la circunferencia, sino que...

b) El apotema se parece cada vez más al radio y…

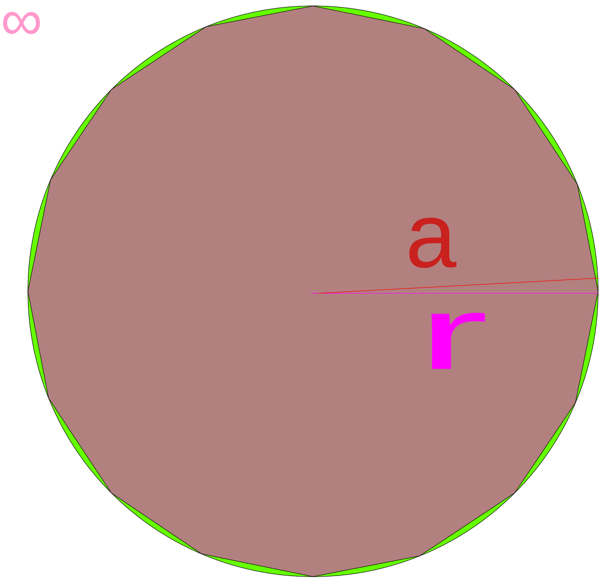
c) El **Área del polígono** se parece cada vez más al **Área del círculo**.

Applet en :
https://www.geogebra.org/m/qwchtqcu

Todo esto se escribe así :

→ se lee “tiende a”

Si $n \rightarrow \infty$



a) $P_p \rightarrow P_c$

b) $a \rightarrow r$

c) $A_p \rightarrow A_c$

Pero el Área del polígono es :

$$A_p = P_p \bullet a \,/\, 2$$

Entonces cuando

$$n \rightarrow \infty$$

Sustituímos a) b) y c) en ésta relación obteniendo :

$$A_c = P_c \bullet r \,/\, 2$$

$$A_c = 2\pi r \bullet r \,/\, 2$$

$$A_c = \pi r^2$$

Visita :
http://dinamate.org

Y su sección histórica :
http://dinamate.org/geometriatrigonometria/PAV/PAV.html