Teoría de

Ecuacioh!nes de grad° superi°r

(Algunos ejemplos)

✔Partiremos del hecho de que el lector **ya** sabe resolver lineales y cuadráticas a la perfección.

✗De lo contrario, favor de dirigirse a la sección de álgebra de dinamate :
http://dinamate.org/algebra/algebra.html
en los títulos : ***1° grado*** y ***2° grado*** respectivamente.

Recordatorio :* *Una ecuación de grado **m tiene hasta m soluciones distintas.*
Así las de 3° grado podrán tener hasta 3, las de 7° hasta 7 etc.
(Podrían tener menos o NO tener (las de grado par))

A) Tipificadas

1.- Cúbicas dependientes (sin término independiente *(cte.)*)

Su forma es : $ax^3+bx^2+cx+0=0$

*Estas se resuelven factorizando la variable (x).

Ejemplo : Resolver $x^3-5x^2+6x=0$

Se factoriza la "x" :

$x(x^2-5x+6)=0$

y como

*"si el producto de 2 factores es **0**, cada uno lo es por sí mismo"* ,

entonces

$x=0$ ó $x^2-5x+6=0$,

de donde, al resolver ambas, obtenemos

$x=0$, $x=2$ ó $x=3$

Ejemplo : Resolver $12x^3-2x^2-4x=0$

Se factoriza la "x" junto con un 2 **(M.C.D. de los coeficientes)** :

$2x(6x^2-x-2)=0$

y como

*"si el producto de 2 factores es **0**, cada uno lo es por sí mismo"* ,

entonces

$2x=0$ ó $6x^2-x-2=0$,

de donde, al resolver ambas, obtenemos

$x=0$, $x=-1/2$ ó $x=2/3$

(En estos casos una solución siempre será cero)

2.-Bicuadráticas **(4° gr. , sin términos de grado impar / El grado de cada término es el doble que el de la cuadrática correspondiente)**

Su forma es : $ax^4+bx^2+c=0$

*Estas se resuelven realizando el cambio de variable $u=x^2$

Ejemplo : Resolver $x^4-10x^2+21=0$

Se realiza el cambio de variable $u=x^2$ obteniendo :

$u^2-10u+21=0$

la cual presenta las soluciones :

$u=3$, $u=7$

y bien, retomando la variable original $u=x^2$:

$x^2=3$, $x^2=7$

de donde, al despejar la “x”, obtenemos las soluciones ordenadas:

$x_1=-\sqrt{7}$, $x_2=-\sqrt{3}$, $x_3=\sqrt{3}$, $x_4=\sqrt{7}$

Ejemplo : Resolver $6x^4-x^2-2=0$

Se realiza el cambio de variable $u=x^2$ obteniendo :

$6u^2-u-2=0$

la cual presenta las soluciones :

$u=-1/2$, $u=2/3$

y bien, retomando la variable original $u=x^2$:

$x^2=-1/2$, $x^2=2/3$

de donde, al despejar la “x”, la primera **NO** presenta soluciones reales, pero las de la segunda son (Ya racionalizadas (mult. por $\sqrt{2}$)) :

$x_1=-\sqrt{6}/3$, $x_2=\sqrt{6}/3$

Nota : *(Estas siempre presentas soluciones simétricas (0, 2 ó 4))*

3.- **n**-aumentadas *“Cualquiera de las anteriores o alguna cuadrática o lineal, aumentada en grado n”*

Su forma es : $ax^5+bx^3+cx=0$, $ax^{4+n}+bx^{2+n}+cx^n=0$ ó $ax^{2+n}+bx^{1+n}+cx^n=0$, $ax^{n+1}+bx^n=0$

Son pues, los casos anteriores pero multiplicados por x^n para algún ***Natural*** **n**.

(En el primer caso , **n=1**)

*Estas se resuelven **análogamente** a las anteriores, pero llevando a cabo una factorización previa del factor x^n :

Ejemplo : Resolver $x^5-10x^3+21x=0$

Factorizamos primero la *“x”*

$x(x^4-10x^2+21)=0$

y obtenemos $x=0$ ó $x^4-10x^2+21=0$

La primera ya es una solución, y para la segunda, procedemos como antes :

Se realiza el cambio de variable $u=x^2$ obteniendo :

$u^2-10u+21=0$

la cual presenta las soluciones :

$u=3$, $u=7$

y bien, retomando la variable original $u=x^2$:

$x^2=3$, $x^2=7$

de donde, al despejar la “x”, obtenemos las soluciones ordenadas:

$x=-\sqrt{7}$, $x=-\sqrt{3}$, $x=\sqrt{3}$, $x=\sqrt{7}$

Añadiendo la antes mencionada $x=0$ tenemos finalmente que :

$x_1=-\sqrt{7}$, $x_2=-\sqrt{3}$, $x_3=0$, $x_4=\sqrt{3}$, $x_5=\sqrt{7}$

Ejemplo : Resolver $x^8+5x^7-14x^6=0$

Factorizamos x^6 :

$x^6(x^2+5x-14)=0$

Y obtenemos que :

$x^6=0$ ó $x^2+5x-14=0$

La primera produce únicamente la solución $x=0$
La segunda produce $x=-7$ ó $x=2$
Y así, las únicas soluciones están dadas por :
$x_1=-7$, $x_2=0$ ó $x_3=2$

B) No Tipificadas

4.-Proposición 1 : Si una ecuación **mónica**(Coeficiente del término principal igual a 1) tiene alguna solución entera, esta divide al término independiente. **Cualquier solución racional es forzosamente entera.**
*Es decir, basta verificar **evaluaciones** en estos divisores.

Ejemplo : Resolver $x^3+6x^2+11x+6=0$

Verificamos evaluaciones en los divisores del término independiente **6** , es decir en
$-6,-3,-2,-,1,1,2,3,6$:
$(-6)^3+6(-6)^2+11(-6)+6=-216+216-66+6=-60$ ✗
$(-3)^3+6(-3)^2+11(-3)+6=-27+54-33+6=0$ ✔
$(-2)^3+6(-2)^2+11(-2)+6=-8+24-22+6=0$ ✔
$(-1)^3+6(-1)^2+11(-1)+6=-1+6-11+6=0$ ✔
Obtenemos así, las 3 raíces(**soluciones**) buscadas : ***-3,-2,-1***
☛como ya tenemos **3** soluciones, **ya no** verificamos las evaluaciones en los positivos *(1,2,3,6)*
No siempre será tan fácil ¿Cierto?

Ejemplo : Resolver $x^3-5x^2+6x-72=0$

Al Verificar evaluaciones en los divisores del término independiente **-72** , es decir en
$-72,-36,-,24,-18,-12,-9,-8,-6,-4,-3,-2,-1,1,2,3,4,6,8,9,12,18,24,36,72$:
Obtenemos que solamente se anula en ***6***
$(6)^3-5(6)^2+6(6)-72=216-180+36-72=0$ ✔
Por lo que $x^3-5x^2+6x-72$ es divisible entre ***(x-6)*****(Teorema del residuo)**
Al dividir los polinomios $(x^3-5x^2+6x-72)/(x-6)$ obtenemos que el cociente es : x^2+x+12
, el cual NO presenta soluciones reales. La única solución es : $x=6$

Ejemplo : Resolver $x^4-8x^3+x^2-7x-8=0$

Al Verificar evaluaciones en los divisores del término independiente **-8** , es decir en
$-8,-4,-2,-1,1,2,4,8$:
Obtenemos que solamente se anula en ***8***
$(8)^4-8(8)^3+(8)^2-7(8)-8=0$ ✔
Por lo que $x^4-8x^3+x^2-7x-8$ es divisible entre ***(x-8)*****(Teorema del residuo)**
Al dividir los polinomios $(x^4-8x^3+x^2-7x-8)/(x-8)$ obtenemos que el cociente es : x^3+x+1
Al no anularse **más**, obtenemos que las demás soluciones(**de haberlas**), no son racionales.

Para más referencias consultar **Método de Cardano para cúbicas y **ecuaciones de Ferrari** para cuárticas*
(Para ecuaciones de grado mayor a 4 No siempre se puede encontrar una solución (Teoría de Galois))-Ver métodos numéricos

5.-Proposición 2 : Para encontrar las soluciones racionales de una ecuación **(de existir)**, basta realizar el cambio de variable $y=a_nx$, donde a_n es el coeficiente del término principal (de grado mayor (n)).
*Transformaremos la ecuación en una **mónica**.

Ejemplo : Resolver $12x^3-8x^2-13x-3=0$

Realizando el cambio de variable $y=12x$ o equivalentemente $x=y/12$

$$12(y/12)^3-8(y/12)^2-13(y/12)-3=0$$

$$y^3/12^2-8y^2/12^2-13y/12-3=0$$

Multiplicamos pues por 12^2 **(el denominador del término principal, para eliminar todos los denominadores)**

$$y^3-8y^2-156y-432=0$$

La cual es una mónica y se resuelve como antes :

Sus soluciones son : **-6,-4,18** **(Verifíquese esto por favor)**

Finalmente, retomamos la variable original $x=y/12$

$x_1=-6/12$, $x_2=-4/12$, $x_3=18/12$

Obteniendo las formas reducidas :

$x_1=-1/2$, $x_2=-1/3$, $x_3=3/2$

¿Problemas?, apóyate en la sección de divisores

Ejemplo : Resolver $6x^4+5x^3+4x^2-2x-1=0$

Realizando el cambio de variable $y=6x$ o equivalentemente $x=y/6$

$$6(y/6)^4+5(y/6)^3+4(y/6)^2-2(y/6)-1=0$$

$$y^4/6^3+5y^3/6^3+4y^2/6^2-2y/6-1=0$$

Multiplicamos pues por 6^3 **(el denominador del término principal, para eliminar todos los denominadores)**

$$y^4+5y^3+24y^2-72y-216=0$$

La cual es una mónica y se resuelve como antes :

Sus soluciones son : **-2,3** **(Verifíquese esto por favor)**

Finalmente, retomamos la variable original $x=y/6$

$x_1=-2/6$, $x_2=3/6$

Obteniendo las formas reducidas :

$x_1=-1/3$, $x_2=1/2$

Ejercicios : Resuelve (Q-sols. Rac.) las siguientes ecuaciones (con comprobación);

Identifica primero si son tipificadas o no, y de serlo, di de que tipo lo es (Incluso, si es n-aumentada, dí cuánto vale n)

a) $x^3+4x^2+3x=0$ b) $x^3-7x^2-18x=0$ c) $x^4-4x^2-45=0$

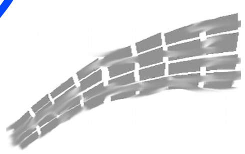
d) $x^4-11x^2+30=0$ e) $x^4-5x^2+4=0$ f) $5x^3+20x^2+15x=0$

g) $6x^4+5x^2+1=0$ h) $20x^4+26x^2-6=0$ i) $12x^4+30x^2-18=0$

j) $30x^5+39x^3-9x=0$ k) $3x^7+8x^5+4x^3=0$ l) $7x^5+56x^4+84x^3=0$

m) $x^3+2x^2-19x-20=0$ n) $x^3-3x^2-5x+4=0$ o) $x^4+2x^3-18x^2-71x-70=0$

p) $6x^4-48x^2-72x-20=0$ q) $2x^3-3x^2-8x-3=0$ r) $3x^4-4x^3-24x^2-27x-20=0$



Visita :

http://dinamateq.org