Matemáticas 4
Actividad conjunta e

El número *e*

(base de Euler)

Auxíliate de una “maquinita”

Teoría básica *(Interés simple y compuesto)* :

En una inversión (préstamo -) se consideran varias variables :

a) La cantidad inicial a invertir C
b) La tasa de interés *(digamos, anual)* i ***--->Como fracción porcentual (Ej 6% ---> 3/50)***
http://dinamate.org/aritmetica/Tarea4M1.pdf
c) El número de plazos *(Discretos)* p ***--->Con respecto a* b)**
d) El tiempo de inversión n *(relacionado al número de **p**lazos, normalmente múltiplo de **p**)*
e) La cantidad final obtenida F

Y para calcular ésto, se lleva a cabo la siguiente operación :
Al primer período (a esto se llamará interés simple), multiplicamos la inversión inicial por la tasa anual **dividida** entre los plazos:

$$F=C+C(i/p)=C(1+i/p)$$

Al segundo, multiplicamos lo **ya obtenido** por el *mismo factor* (interés compuesto):

$$F=C+C(i/p)+[C+C(i/p)](i/p)=(C+C(i/p))^2=\mathbf{C(1+i/p)}\underline{(1+i/p)}=C(1+i/p)^2$$

Al tercero, similarmente

$$F=C(1+i/p)^3$$

.
. ...y así sucesivamente
.

Al **n**-ésimo obtendríamos

$$F=C(1+i/p)^n$$

Con esta fórmula calculamos la cantidad final obtenida.
Revisa ejemplos con el siguiente ejercicio

1.- Con una tasa de interés del 6% anual pero a plazos mensuales (12) , calcula la cantidad de dinero que se obtendría al depositar 100$ **durante** :
a) Un mes *(Interés simple)*
b) 3 meses
c) 6 meses
d) año y medio
e) Repite los incisos anteriores pero con una tasa de 9%
f) Repite los mismos incisos pero con una inversión de 500$

****Nótese que del ejercicio 1 son 12 problemas.***

Reduciendo los plazos :

Si los plazos de inversión se reducen, podemos observar que la cantidad obtenida es cada vez mayor, *p.e.* :

50,000$ con 3% anual a **6 meses** dan :

a) Con plazos trimestrales $F=50{,}000(1.0075)^{2}=50{,}000(1.0150563)=50{,}752.813$

b) Con plazos mensuales $F=50{,}000(1.0025)^{6}=50{,}000(1.0150941)=50{,}754.703$

c) Con plazos quincenales $F=50{,}000(1.00125)^{12}=50{,}000(1.0304352)=50{,}755.178$

d) Con plazos diarios $F=50{,}000(1.0083333)^{180}=50{,}000(4.453893)=222{,}694.65$

La primeras **diferencias** **(restas)** **NO** resultan significativamente grandes, pero la última Ya señala algo mucho mayor. Entonces, es natural pensar que mientras MÁS se reduzcan estos plazos, mayor será nuestra ganancia *(De cualquier forma, nosotros esperaremos el mismo tiempo)*.

☞ ***Verifiquemos que esto se cumple, con el siguiente ejercicio***

2.- Repetir el ejercicio 1 pero con plazos :

i) Semestrales

ii) Trimestrales

iii) Quincenales

iv) Semanales **(Suponiendo 4 semanas por mes exactamente)**

v) Diarios **(suponiendo que el año tuviese 360 días)**

vi) Por 12 horas **(con la misma hipótesis)**

vii) Por hora **(con la misma hipótesis)**

****Nótese que como del ejercicio 1 son 12 problemas, entonces del 2 serán 84 más.***

Motivación de *e* :

i) Como podemos ver de los ejercicios anteriores, el inciso e **sí** nos hace trabajar mucho más, pues hay que calcular de nuevo y variar la potencia necesitada, pero el inciso f NO, podemos calcular primero la potencia y cambiar solamente la multiplicación al final *¿Cierto?, explica...*

De esta forma, normalmente omitimos la cantidad inicial pues siempre podemos multiplicar por ella al final.Trabajaremos solamente sobre $(1+i/p)^{n}$.

ii) Alguien podría pensar que mientras más reduzcamos el plazo *(digamos p.e. a una milésima de segundo)*, nuestra ganancia siempre aumentará sin medida, pero No es así, es decir, hay un ***límite*** en donde nuestra ganancia ya no será mayor por más que reduzcamos el plazo. Esto será representado por una ***Base*** llamada base de Euler (***"Oiler"***) y representada por la letra ***e***.

✔ Sin perder generalidad, podemos suponer que la fracción i/p es de la forma $1/10^{k}$, y que la potencia corresponde con el denominador ***m***

3.- Calcula para cada **k**=1,2,3,4,5,6,8,10,12,14,16. *(Utilizando 6 cifras decimales en cada caso)*

$(1+1/m)^{m}$ en donde $m=10^{k}$

(11 valores a calcular)

Estos valores calculados aproximan la mencionada Base de Euler $e=e^{1}$, este número es un irracional

¿Recuerdas qué significa esto?.

Conclusiones :

Conforme el plazo se reducía, observamos que la cantidad final obtenida aumentaba, pero esto **solo** sucedía **sin medida**, si dejábamos correr el tiempo indefinidamente ***[como bien se observo en los ejercicios 2 y 3]***. De esta manera, y ahora sin depender de la *base 10* como en el ejercicio 3 , podemos definir la base de Euler de la siguiente manera :

$$e := \lim_{m \to \infty} (1+1/m)^m \simeq \mathbf{2.718281...}$$

esto resulta análogo a lo que se hacía en 2 , para un tiempo de inversión fijo *(p.e. 3 años)* , aumentábamos el número de plazos p , obligando a la fracción i/p a ser infinitesimalmente pequeña. Aquí se realiza un procedimiento similar pero con límite. Si $m \to \infty$, entonces $1/m \to 0$, o equivalentemente :

$$e = \lim_{k \to 0} (1+k)^{1/k}$$

El primer matemático en conocerla formalmente no fue Euler sino Jacob Bernoulli, sin embargo fue hasta 1727 cuando su uso comenzó a hacerse común gracia a Euler.
La exponencial de Euler representa la **base** del comportamiento Natural de las *"cosas"* , por ejemplo: El crecimiento de células, o la desintegración radioactiva, etc. Esto sucede pues la regeneración/desintegración de ellas es instantánea. Por ello requiere de un Límite como los superiores ⇑ y no plazos discretos *(de tiempo fijo)* como en una inversión. Esto no quiere decir que No pueda aplicarse en casos bancarios, poblacionales, etc., simplemente no se limita a ellos, sino que es universal y por ende, aplica a casos continuos y/o discretos.

4.-

a) Grafica $f(x)=e^x$ *=exp(x)* mediante tabulación del -9 al 9

b) El Logaritmo natural $t(x)=\ln(x)$ es la función inversa de la exponencial $f(x)=e^x$, su gráfica es sumamente sencilla, esta, **como toda función inversa**, simplemente consiste en trasponer los ejes : Trázala así, o bien, usa tabulación.

c) Discute con tus compañeros y/o profesor las propiedades básicas de estas ***(Anota conclusiones)***.

d) *(Opcional)* Grafica :

$g(x)=e^{x-2}$; $h(x)=3e^x-1$; $i(x)= -2\ln(x+4)$; $j(x)=\ln(2x)-5$; $k(x)=-e^x/3+2$; $m(x)=\ln(-x)/2$

Utilizando traslaciones y/u homotecias

e) *(Opcional)* Aproxima el valor de e **(a 6 decimales)** utilizando la siguiente expresión :

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

pero en lugar de ∞ , toma valores como 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10

(Recuerda que [n-factorial] ***n!=n(n-1)(n-2)...3*2*1*1 ; 0!=1****)*

5.- Relee esta actividad varias veces para revisar teoría y consolidar conceptos.

Aclara dudas con tu profesor

Visita : http://dinamate.org